

О ЗАДАЧЕ ОБХОДА НЕЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМОЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ДВУХ ТОЧЕК*

Исследуется задача о наискорейшем последовательном обходе нелинейной управляемой системой третьего порядка двух точек. При этом используется система дифференциальных уравнений, описывающая простейшую модель движения самолета (автомобиля) в горизонтальной плоскости. Определяется структура оптимальных траекторий при различных местоположениях целевых точек.

Отличие исследуемой задачи от рассматривавшихся ранее состоит в наличии не одной, а двух целевых точек, подлежащих последовательному во времени обходу. Сложность этой задачи в том, что ее нельзя разбить на две последовательно решаемые двухточечные задачи, состоящие в переводе из одной точки в другую. Здесь при переходе из начального положения в первую точку необходимо учитывать информацию о второй точке, подлежащей обходу, так как игнорирование ее может привести к значительному увеличению суммарного времени обхода [1]. Учитывать эту информацию позволяют необходимые условия оптимальности управления и временных параметров в форме принципа максимума и выравнивания гамильтониана, полученные для задачи последовательного управления [1, 2], частным случаем которой является исследуемая задача.

Близкая по постановке задача рассматривалась ранее [3], причем при заданном отрезке функционирования системы минимизировалось максимальное из рассогласований между целевыми точками и положениями управляемого объекта на плоскости в некоторые моменты времени. Минимизация осуществлялась за счет выбора управления и этих моментов времени.

1. Постановка задачи

Движение нелинейного управляемого объекта в трехмерном фазовом пространстве на достаточно большом отрезке времени $T = [t_0, t^0]$ (t_0, t^0 – заданные числа, $t_0 < t^0$) описывается системой уравнений

$$\dot{x} = \cos \alpha, \quad \dot{y} = \sin \alpha, \quad \dot{\alpha} = u; \quad |u| \leq 1. \quad (1.1)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты №03-01-00415, 01-01-96450, и Министерства образования РФ, грант Е02-1.0-232.

© Ю. И. Бердышев, 2003

Здесь x, y, α – координаты фазового вектора системы (1.1), u – управляющий параметр, удовлетворяющий указанному ограничению. Состояние (x_0, y_0, α_0) объекта (1.1) в начальный момент времени t_0 предполагает заданным

$$x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, \alpha(t_0) = \alpha_0. \quad (1.2)$$

Как известно [4, 5], система (1.1) описывает простейшее движение самолета (автомобиля) в горизонтальной плоскости Oxy . При этом x, y – координаты самолета, отождествляемого с точкой на плоскости; α – угол между вектором скорости $\mathbf{V} = (\dot{x}, \dot{y})$ и осью x ; u – параметр, характеризующий скорость изменения угла α . Эта модель использовалась для постановок как игровых задач [6–12], так и задач управления [13–20]. В частности, синтезировано [13] оптимальное управление, обеспечивающее наискорейшее попадание самолета из начального состояния в фиксированную точку плоскости движения. Эта же задача была решена [14] для более сложной модели движения, описываемой нелинейной системой четвертого порядка.

Заметим, что ранее [4–20] рассматривалась, как правило, система уравнений, отличавшаяся от (1.1) наличием постоянного коэффициента V_0 в правой части двух первых уравнений (1.1) и постоянного коэффициента K в правой части третьего уравнения (1.1). Но от этих коэффициентов можно избавиться за счет сжатия или растяжения координат x, y и времени t .

Далее момент $t^0, t^0 > t_0$, предполагается достаточно большим.

В качестве класса допустимых управлений выберем множество \mathbf{U} всех кусочно-непрерывных скалярных функций $U : T \rightarrow \{u : |u| \leq 1\}$. Каждое управление $U \in \mathbf{U}$ порождает движение, исходящее из начальной точки (x_0, y_0, α_0) , которое будем обозначать через

$$(x_u, y_u, \alpha_u) = ((x_u(t), y_u(t), \alpha_u(t)), t \in T).$$

Под траекторией системы (1.1), порожденной управлением U , далее понимаем множество $((x_u(t), y_u(t)), t \in T)$ на плоскости Oxy .

На плоскости Oxy произвольным образом заданы две точки W_1 и W_2 . Пусть x_i, y_i – координаты точки W_i ($i = 1, 2$). Далее, не оговаривая дополнительно, будем полагать, что $i = 1, 2$. Будем говорить, что управление $U \in \mathbf{U}$ обеспечивает сближение системы (1.1) с точками W_i , если найдутся моменты t_i , для которых имеют место соотношения $x_u(t_i) = x_i, y_u(t_i) = y_i$.

Исходная задача состоит в определении управления $U \in \mathbf{U}$, обеспечивающего сближение системы (1.1) с точками $W_i(t)$ за наименьшее время, а также в определении самих моментов t_i времени сближения.

Порядок обхода задаем соотношением

$$t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t^0, \quad (1.3)$$

т. е. точки обслуживаются в порядке возрастания их номеров.

2. Необходимые условия оптимальности управлений и моментов времени

Используем необходимые условия оптимальности программного управления и набора временных параметров в форме принципа максимума Л. С. Понтрягина [21] и условий выравнивания гамильтониана, установленные [1, 2] для задач последовательного управления. При этом полагаем, что \mathbb{T} – множество всех двумерных векторов $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$, удовлетворяющих соотношению (1.3).

В соответствии с результатами [1] введем дополнительную фазовую координату z , удовлетворяющую соотношениям

$$\dot{z} = 1, \quad z(t_0) = t_0,$$

а также функции $\Phi_i : T \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$), удовлетворяющие равенствам $\Phi_1(t, x, y, \alpha, z) = 0$, $\Phi_2(t, x, y, \alpha, z) = z - t_0$. При этом заметим, что функции $\psi_i(t)$, $t \in [t_0, t_i]$, фигурирующие в формулировке теоремы 7.1 [1], при заданном управлении $U = U^*(t)$ могут быть найдены в стандартной форме как решения векторных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_i &= -L'(t) \psi_i, \\ (L(t) &= \frac{\partial f(t, x, u)}{\partial x} \Big|_{u=U^*(t), x=\varphi_{u^*}(t)}). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $f(t, x, u)$ – правая часть векторного уравнения, описывающего движение управляемого объекта [1]. В рассматриваемом случае четырехмерные функции $\psi_i(t)$, $t \in [t_0, t_i]$, координаты которых в каждый момент времени $t \in [t_0, t_i]$ обозначим через ψ_{ij} ($j = 1, \dots, 4$), удовлетворяют системе

$$\dot{\psi}_{i1} = 0, \quad \dot{\psi}_{i2} = 0, \quad \dot{\psi}_{i3} = \psi_{i1} \dot{y} - \psi_{i2} \dot{x}, \quad \dot{\psi}_{i4} = 0 \quad (2.2)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \psi_{i1}(t_i) &= \Lambda_{i1}, \quad \psi_{i2}(t_i) = \Lambda_{i2}, \quad \psi_{i3}(t_i) = 0, \\ \psi_{i4}(t_i) &= \begin{cases} 0, & i = 1, \\ -1, & i = 2. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь Λ_{ij} ($j = 1, \dots, 4$) – постоянные интегрирования, подлежащие определению. Из (2.2), (2.3) видно, что при любом управлении $U \in \mathbf{U}$ выполняется соотношение

$$\psi_{i3}(t) = \Lambda_{i1}(y_u(t) - Y_i) - \Lambda_{i2}(x_u(t) - X_i). \quad (2.4)$$

В рассматриваемом случае K_i суть двумерные функции, компоненты которых K_{ij} ($j = 1, 2$) определяются соотношениями $K_{i1} = x - x_i$, $K_{i2} = y - y_i$.

Поэтому векторы Λ_i^* , фигурирующие в формулировке теоремы 7.1 из работы [1] и подлежащие определению, будут двумерными. Их координаты далее будем обозначать через $-\Lambda_{i1}, -\Lambda_{i2}$. Тогда векторы l_i^* (см. [1, теорема 7.1]) будут определяться соотношениями $l_2^* = (\Lambda_{21}, \Lambda_{22}, 0, -1)'$, $l_1^* = (\Lambda_{11}, \Lambda_{12}, 0, 0)'$ (штрих означает транспонирование).

Согласно [2] и теореме 7.1 [1], если (\mathbf{t}^*, U^*) – решение исходной задачи, то найдутся такие двумерные векторы Λ_i^* , при которых функции

$$\bar{\psi}_k^*(t) = \sum_{i=k}^2 \psi_i^*(t) \quad (2.5)$$

на соответствующих отрезках $[t_{k-1}, t_k]$ будут удовлетворять условию максимума (см. (7.6) в [1]). В рассматриваемом случае эти условия эквивалентны соотношениям

$$U(t) = \text{sign } \bar{\psi}_{k3}(t), \quad \bar{\psi}_{k3}(t) \neq 0 \quad (t \in [t_{k-1}, t_k], \quad k = 1, 2). \quad (2.6)$$

Здесь и далее $\bar{\psi}_{kj}$ ($k = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, 3, 4$) – координаты вектора $\bar{\psi}_k^*$ (2.2). Условие выравнивания (см. (7.7) в [1]) здесь примет вид

$$\begin{aligned} & \bar{\psi}_{21} \cos \alpha_u(t_1^*) + \bar{\psi}_{22} \sin \alpha_u(t_1^*) + |\bar{\psi}_{23}(t_1^*)| = \\ & = \bar{\psi}_{11} \cos \alpha_u(t_1^*) + \bar{\psi}_{12} \sin \alpha_u(t_1^*) + |\bar{\psi}_{13}(t_1^*)|. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Используя соотношения (2.4)–(2.6), можно показать [2], что оптимальная траектория (ОТ) состоит из дуг D_i ($i = 0, 1$) окружностей единичного радиуса и отрезков G_k ($k = 1, 2$) прямых, их соединяющих; при этом дуги и отрезки касаются друг друга в точках их соприкосновения.

3. Определения и классификация возможных случаев взаимного расположения точек W_1, W_2

Без ограничения общности будем считать, что $x_0 = y_0 = \alpha_0$. Предварительно введем следующие обозначения: C_1, C_2 – окружности единичного радиуса, касающиеся оси Ox в начале координат O и соответственно находящиеся выше, ниже этой оси; C_1^0, C_2^0 – круги, ограниченные этими окружностями. Для единообразия начало координат O будем обозначать через W_0 . Далее будем использовать окружности только единичного радиуса. Если точка W_1 достаточно близка к точке W_0 , то обозначим через C_3, C_4 окружности, проходящие через точку W_1 и касающиеся окружности C_2 (C_3 – та окружность, которой соответствует меньший центральный угол, опирающийся на дугу с концами в точке касания и точке W_0); C_5, C_6 – окружности, проходящие через точку W_1 и касающиеся окружности C_1 (C_5 – окружность, которой

соответствует меньший центральный угол, опирающийся на дугу с концами в точке касания и точке W_0). Пусть α – угол между осью Ox и проходящей через точку W_1 касательной к одной из окружностей C_1 (при $y_1 > 0$) или C_2 (при $y_1 < 0$). Заметим, что угол α при $y_1 > 0$ можно найти из уравнения

$$x_1 \sin \alpha - (y_1 - 1) \cos \alpha = 1.$$

Полагаем

$$a = 2|y_1|/(x_1^2 + y_1^2), \quad (3.1)$$

$$b = (x - x_1) \sin \alpha - (y - y_1) \cos \alpha, \quad (3.2)$$

$$d = 2|b_1|/((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2), \quad (3.3)$$

b_1 – значение b при $x = x_2$, $y = y_2$. Геометрический смысл величин a, b_1, d состоит в следующем. Если $a < 1$, то точка W_1 находится вне кругов C_1^0, C_2^0 , если $a > 1$, то точка W_1 находится внутри одного из этих кругов, если $a = 1$, то точка W_1 находится на одной из указанных окружностей. Прямая $b = 0$ разбивает плоскость движения на две части, знак b_1 указывает, в какой из этих частей находится точка W_2 . При $d < 1$ точка W_2 находится вне кругов, касающихся прямой $b = 0$ в точке W_1 , а при $d > 1$ – внутри этих кругов.

Возможны лишь следующие случаи расположения точки W_1 в плоскости движения:

$$\begin{aligned} &1) a < 1, y_1 > 0; \quad 2) a > 1, y_1 > 0; \quad 3) a = 1, y_1 > 0; \\ &4) a < 1, y_1 < 0; \quad 5) a > 1, y_1 < 0; \quad 6) a = 1, y_1 < 0; \\ &7) y_1 = 0, x_1 > 0; \quad 8) y_1 = 0, x_1 < 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

При $y_1 > 0$ полагаем

$$d_+ = (x_1^2 + (y_1 + 1)^2)^{1/2}, \quad d_- = (x_1^2 + (y_1 - 1)^2)^{1/2}.$$

Случай 1, в котором $W_1 \notin C_1^0$ разбивается на три подслучая:

$$11) d_+ \geq 3; \quad 12) d_- \leq 3 < d_+; \quad 13) d_- \leq 3.$$

В случае 2 обозначим через α_1 угол между осью Ox и направлением вектора скорости в точке W_1 , если в нее прибыть по дуге W_0M окружности C_2 (M – точка касания окружностей C_2 и C_3) и дуге MW_1 окружности C_3 .

Пусть b_2, d_1 суть величины b_1, d (3.2) при $\alpha = \alpha_1$. Случай 2 разбивается на семь подслучаев:

$$\begin{aligned} &21) d_1 < 1, b_1 > 0; \quad 22) d_1 < 1, b_1 = 0; \quad 23) d_1 < 1, b_1 < 0; \quad 24) d_1 = 1, b_1 > 0; \\ &25) d_1 = 1, b_1 < 0; \quad 26) d_1 > 1, b_1 > 0; \quad 27) d_1 > 1, b_1 < 0. \end{aligned}$$

Аналогично разбивается и случай 3.

Заметим, что случаи 4–6 сводятся соответственно к случаям 1–3 за счет смены знака на противоположный у координат y_1, y_2 . Построенную после этой замены траекторию надо симметрично отразить относительно оси Ox .

4. Построение оптимальной траектории

В работе [2] показано, что в случае, когда точки O, W_1, W_2 достаточно удалены друг от друга, первый участок оптимальной траектории (ОТ) – дуга D_0 , последний участок – отрезок G_2 , заканчивающийся точкой W_2 ; число дуг равно числу целей (в данном случае двум), при этом встреча управляемого объекта с точкой W_1 , в силу условия выравнивания (2.7), происходит на середине дуги D_1 . Для доказательства этого факта устанавливается невозможность иной структуры ОТ, отличной от описанной. К настоящему времени автором рассмотрены все возможные случаи взаимного расположения целевых точек W_1, W_2 и совместно со студентами ЕКТС А. Ю. Бахаревым и Д. А. Староверовым разработана программа на ЭВМ построения оптимальных траекторий. В настоящей работе более подробно рассматривается лишь случай 1 и указываются виды ОТ в некоторых других случаях.

При построении ОТ будем использовать следующие обозначения. Точки на плоскости будем обозначать прописными латинскими буквами A, B, \dots , их координаты – $(x_A, y_A), (x_B, y_B), \dots$. Для любой точки A через $C(A)$ обозначаем окружность с центром в точке A . Пусть D – точка с координатами

$$x_D = x_1 + \cos(\alpha + \beta + \pi/2), \quad y_D = y_1 + \sin(\alpha + \beta + \pi/2)$$

(β – угол, подлежащий определению, $\beta \geq 0$). Пусть φ – угол наклона касательной при $y_D \geq 1$ к окружностям $C_1, C(D)$, а при $y_D < 1$ – к окружностям $C_2, C(D)$. В первом случае этот угол определяется соотношением

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y_D - 1}{x_D}, & x_D \neq 0, \\ \pi/2, & x_D = 0, \end{cases}$$

а во втором случае – из уравнения

$$x_D \sin |\varphi| + (y_D + 1) \cos |\varphi| = 2.$$

Полагаем

$$\omega = (\alpha - \varphi)/2 + \beta. \quad (4.1)$$

Пусть $b > 0$. При произвольном угле β через P будем обозначать точку на окружности $C(D)$, для которой центральный угол, опирающийся на дугу

W_1P , равен углу ω (4.1). При изменении угла β от нуля до некоторого β_0 точка P в полуплоскости $b > 0$ опишет некоторую кривую L_+ . Обозначим через G_2 область, ограниченную кривой L_+ и прямой $b = 0$. Дополнение этой области до всей полуплоскости $b > 0$ обозначим через G_1 (рис. 1).

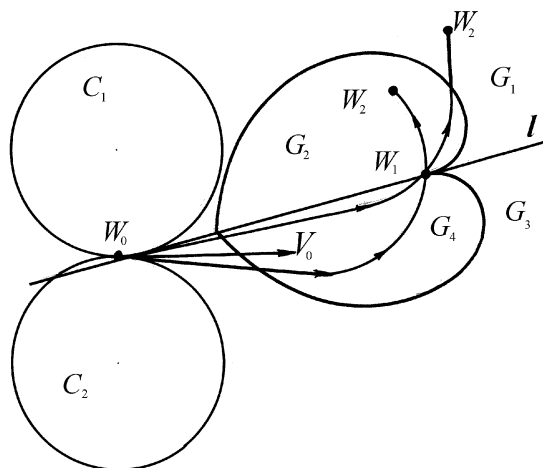


Рис. 1

Теперь рассмотрим случай, когда $b < 0$. Полагаем $T = (x_T, y_T)$,

$$x_T = x_1 + \cos(\alpha - \beta - \pi/2), \quad y_T = y_1 + \sin(\alpha - \beta - \pi/2),$$

ψ – угол наклона касательной к окружностям $C^+, C(T)$,

$$\rho = (\alpha - \psi)/2 + \beta. \quad (4.2)$$

При произвольном угле β через R будем обозначать точку на окружности $C(T)$, для которой центральный угол, опирающийся на дугу W_1R , равен углу ρ (4.2). При изменении угла β от нуля до некоторого β_1 точка R в полуплоскости $b < 0$ опишет некоторую кривую L_- . Обозначим через G_4 область, ограниченную кривой L_- и прямой $b = 0$. Дополнение этой области до всей полуплоскости $b < 0$ обозначим через G_3 (рис. 1). В действительности области G_1, G_2 граничат с областями G_3, G_4 лишь по той части прямой $b = 0$, где $(x - x_1) \cos \varphi + (y - y_1) \sin \varphi \geq 0$. В той части плоскости, где последнее неравенство не выполняется, границей между этими областями служит некоторая кривая L_0 , лежащая в окрестности прямой $b = 0$ и обладающая тем свойством, что на нее за одно и то же время можно попасть под действием

и управлений, принимающих значения $(\mp 1, 0, -1, 0)$, $(\mp 1, 0, -1)$, и управлений, принимающих значения $(\mp 1, 0, 1, 0)$, $(\mp 1, 0, 1)$. Как показал численный эксперимент, кривая L_0 достаточно близко лежит к прямой $b = 0$, поэтому в дальнейшем мы не будем их различать.

Таким образом, в случае 11 при фиксированной точке W_1 вся область движения разбивается на четыре части: G_1, \dots, G_4 (рис. 1). Если $W_2 \in G_1$, то оптимальное управление принимает при $y_D \leq 1$ значения $(1, 0, 1, 0)$, а при $y_D < 1$ – значения $(-1, 0, 1, 0)$. Если $W_2 \in G_2$, то заключительный прямолинейный участок ОТ, соответствующий управлению $u \equiv 0$, будет отсутствовать. Если $W_2 \in G_3$, то оптимальное управление принимает значения $(\mp 1, 0, -1, 0)$, а при $W_2 \in G_4$, – значения $(\mp 1, 0, -1)$. На рис. 1 линиями со стрелками указаны возможные виды оптимальных траекторий.

Ввиду того что при $d_- < 3$ окружность единичного радиуса, проходящая через точки W_1, W_2 , может пересекаться с окружностью C_1 , продолжить кривую L_- можно только до встречи с окружностью C_3 . В этом случае область G_3 будет ограничена кривой L_- и частью окружности C_3 . Здесь область G_4 разбивается на три части: G_{41}, G_{42}, G_{43} (рис. 2), где G_{41} – область, ограниченная кривой L_0 и дугой окружности C_3 ; G_{42} – область, ограниченная дугами окружностей C_3, C_7 ; G_{43} – область, ограниченная прямой $b = 0$ и окружностью C_3 за вычетом области G_{42} . На рис. 2 линиями со стрелками обозначены возможные оптимальные траектории (ОТ) в случаях, когда $W_2 \in G_2$ либо $W_2 \in G_4$.

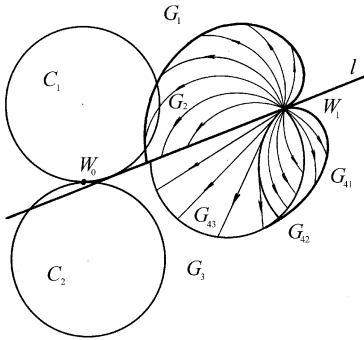


Рис. 2

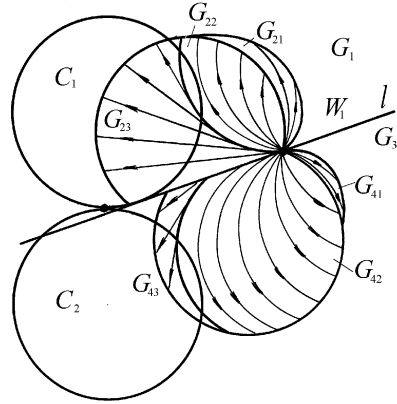


Рис. 3

Ввиду того что при $d_+ < 3$ окружность единичного радиуса, проходящая через точки W_1, W_2 , может пересекаться с окружностью C_2 , продолжить кривую L_+ можно только до встречи с окружностью C_5 . В этом случае область G_1 будет ограничена кривой L_+ и частью окружности C_5 . Здесь область G_2

разбивается на три части: G_{21} , G_{22} , G_{23} (рис. 3). Области G_3 , G_{41} , G_{42} , G_{43} строятся так же, как и в случае 12. Таким образом, случай 1 полностью рассмотрен.

В случае 21 ОТ будет состоять из дуги W_0M окружности C_2 (M – точка касания C_2 с C_3), дуги MW_1 , дуги W_1N (N – точка, в которой вектор скорости направлен в точку W_2), а также прямолинейного отрезка NW_2 .

В случае 22 ОТ будет такой же, как и в случае 21, с той лишь разницей, что точки W_1, N будут совпадать. В случае 23 ОТ будет состоять из дуги W_0S окружности C_2 , дуги SE окружности C_5 , касающейся окружности C_2 в точке S , дуги EF окружности C_8 , касающейся окружности C_5 и проходящей через точку W_1 , и прямолинейного участка FW_2 (F – точка на окружности C_6 , в которой вектор скорости направлен в точку W_2).

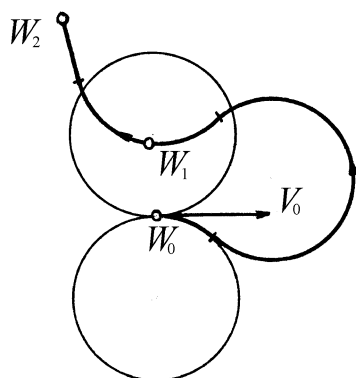


Рис. 4

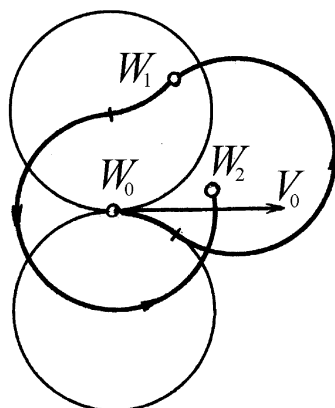


Рис. 5

Вид ОТ в случаях 23 и 26 показан соответственно на рис. 4, 5.

Литература

1. БЕРДЫШЕВ Ю. И. К задаче последовательного обхода нелинейным управляемым объектом совокупности гладких многообразий // Дифференц. уравнения и процессы управления. 1999. №2. С. 3–27.
2. БЕРДЫШЕВ Ю. И. Об оптимальном по быстродействию последовательном обходе нелинейной управляемой системой третьего порядка совокупности точек // Теория систем и управление. 2002. №3. С. 41–48.
3. БЕРДЫШЕВ Ю. И. Об одной задаче последовательной оптимизации без декомпозиции во времени // Кибернетика. 1987. №4. С. 32–35.
4. АЙЗЕКС Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
5. ХАМЗА М. Х., КОЛАС И., РУНГАЛЬДЕР В. Оптимальные по быстродействию траектории полета в задаче преследования // Управление космическими аппаратами и кораблями. М.: Наука, 1971. С. 410–418.

6. COCKAYNE E. Plane pursuit with curvature constraints // SIAM J. Appl. Math. 1967. Vol. 15, №6. P. 1511–1516.
7. SALMON D. M. Policies and controller design for a pursuing vehicle // IEEE Trans. Automat. Control. 1969. Vol. 14, №5. P. 482–488.
8. ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л., МЕЛИКЯН А. А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978.
9. СИМАКОВА Э. Н. Об одной задаче преследования на плоскости // Автоматика и телемеханика. 1968. №7. С. 19–23.
10. MEIER L. A new technique for solving pursuit-evasion differential games // IEEE Trans. Automat. Control. 1969. Vol. 14, №5. P. 352–359.
11. PATSKO V. S., TUROVA V. L. Homicidal chauffeur game: computation of level sets of the value function // Advances in dynamic games and applications. (Annals Intern. Soc. Dynamic Games. 2001. Vol. 6.) P. 296–322.
12. ПАЦКО В. С., ПЯТКО С. Г., КУМКОВ С. И., ФЕДОТОВ А. А. Оценивание движения воздушного судна на основе информационных множеств при неполных замерах координат // Науч. докл. Акад. граждан. авиации. С.-Петербург. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1999.
13. БЕРДЫШЕВ Ю. И. Синтез оптимального управления для одной системы 3-го порядка // Вопросы анализа нелинейных систем автоматического управления: Тр./ ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1973. Вып. 12. С. 91–101.
14. БЕРДЫШЕВ Ю. И. Синтез оптимального по быстродействию управления для одной нелинейной системы четвертого порядка // Прикладная математика и механика. 1975. Т. 39, вып. 6. С. 985–994.
15. PESVARADI T. Optimal horizontal guidance law for aircraft in the terminal area // IEEE Trans. Automat. Control. 1972. Vol. 17, №6. P. 763–772.
16. АЛЕШКОВ Ю. З. Оптимальный вывод точки на траекторию, соответствующую требуемому методу наведения // Вестн. ЛГУ. Математика, механика, астрономия. 1963. №19, вып. 4. С. 85–92.
17. БОЛЫЧЕВЦЕВ Э. М. Одна задача оптимального управления // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1968. №1. С. 91–98.
18. КУКУШКИН А. П. Исследование структуры оптимальных по быстродействию траекторий в плоском поле тяготения // Вопросы оптимизации нелинейных систем автоматического управления: Тр./ ИММ УНЦ АН СССР. 1975. Вып. 20. С. 48–70.
19. Проблемы механики управляемого движения: Оптимизация управления космическими аппаратами: Сб. статей. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1976.
20. РЕПЬЯХ Н. А. Локально оптимальный синтез управления летательным аппаратом // Проблемы механики управляемого движения. Пермь, 1972. №1. С. 182–195.
21. ПОНТЯГИН Л. С., БОЛТЯНСКИЙ В. Г., ГАМКРЕЛИДЗЕ Р. В., МИЩЕНКО Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.

Статья поступила 19.10.2002 г.
Окончательный вариант 28.11.2002 г.